H 16 Toepassingen van de differentiaalrekening.

1a.

$$f(x)=6x^4+6\sqrt{x}-\frac{6}{x^4}=6x^4+6\sqrt{x}-6x^{-4}\Rightarrow$$

$$f'(x)=24x^3+\frac{6}{2\sqrt{x}}+24x^{-5}=24x^3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{24}{x^5}$$

b.

$$g(x)=5\sqrt{x^2-8}\Rightarrow g'(x)=5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-8}}\cdot 2x=\frac{5x}{\sqrt{x^2-8}}$$

c.

$$h(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x}=3x-2+x^{-1}\Rightarrow h'(x)=3-0-x^{-2}=3-\frac{1}{x^2}$$

d.

$$k(x)=3(2x-1)^7+8x\Rightarrow k'(x)=21(2x-1)^6\cdot 2+8=42(2x-1)^6+8$$

2. $A=\dfrac{3}{t}+3\sqrt{t}-3t \qquad P=5q^2+\sqrt{6q+15} \qquad R=\dfrac{6p^2+2p+3}{2p}$

a. $A=\dfrac{3}{t}+3\sqrt{t}-3t=3\cdot t^{-1}+3\sqrt{t}-3t\Rightarrow \dfrac{dA}{dt}=-3t^{-2}+3\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-3=-\dfrac{3}{t^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}-3$

b.

$$P=5q^2+\sqrt{6q+15}\Rightarrow\frac{dP}{dq}=10q+\frac{1}{2\sqrt{6q+15}}\cdot 6=10q+\frac{3}{\sqrt{6q+15}}$$

c.

$$R=\frac{6p^2+2p+3}{2p}=\frac{6p^2}{2p}+\frac{2p}{2p}+\frac{3}{2p}=3p+1+\frac{3}{2}\cdot p^{-1}\Rightarrow$$

$$\frac{dR}{dp}=3-\frac{3}{2}p^{-2}=3-\frac{3}{2p^2}$$

3. Gegeven : $f(x)=-0,5(x^2-3)^4+8$

a.

De gemiddelde snelheid op het interval [1,5 ; 1,9] is :

$$\frac{f(1,9)-f(1,5)}{1,9-1,5}=\frac{7,9308-7,8418}{0,4}\approx 0,22$$

b.

$$f'(x)=-2(x^2-3)^3\cdot 2x=-4x(x^2-3)^3\Rightarrow f'(3)=-2592\Rightarrow$$

De snelheid waarmee f afneemt in $x=3$ is dus 2592.

c. $f'(1) = -4 . (-8) = 32$ $\Rightarrow$ De vergelijking van de raaklijn is nu : $y = 32x + b$
Het raakpunt is $(1, f(1)) = (1, 0)$ $\Rightarrow$ $0 = 32 . 1 + b \Leftrightarrow b = -32 \Rightarrow$
De gevraagde vergelijking is nu : $y = 32x - 32$

4. $g(x) = 2x - \frac{4}{x} + 1$

a. $g(x) = 2x - \frac{4}{x} + 1 = 2x - 4 \cdot x^{-1} + 1 \Rightarrow g'(x) = 2 + 4 \cdot x^{-2} = 2 + \frac{4}{x^2} \Rightarrow$
$g'(3) = 2+4/9$ Deze uitkomst is positief $\Rightarrow$ $g(x)$ neemt toe voor $x = 3$.

b.
$g'(2) = 2 + \frac{4}{4} = 3$ $\Rightarrow$ Stel de vergelijking is nu : $y = 3x + b$.
Het raakpunt in $x = 2$ is : $(2, f(2)) = (2, 3)$ Invullen geeft :
$3 = 6 + b \Leftrightarrow b = -3$ $\Rightarrow$ De vergelijking is nu : $y = 3x - 3$

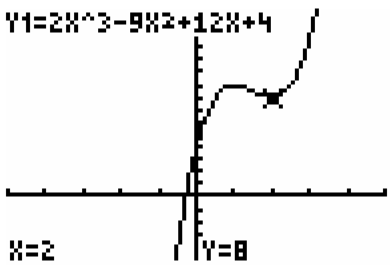
c
De snelheid is 9 $\Rightarrow$ $f'(x) = 9 \Leftrightarrow 2 + \frac{4}{x^2} = 9 \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} = 7 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{4}{7}} \vee x = \sqrt{\frac{4}{7}}$

5. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

a. $y' = 6x^2 - 18x + 12$ $\Rightarrow$ De snelheid in $x = 3$ is dus $y'(3) = 12$

b.
De gemiddelde snelheid op het interval [3 ; 3,01] is :
$\frac{y(3{,}01) - y(3)}{3{,}01 - 3} = \frac{13{,}1209 - 13}{0{,}01} = 12{,}09 \Rightarrow$ De procentuele afwijking is dan :
$\frac{12{,}09 - 12}{12} \cdot 100\% = 0{,}75\%$

c.
Voor het minimum moet gelden : $y' = 0 \Rightarrow$
Er geldt $y'(2) = 24 - 36 + 12 = 0$
Nu nog een schets van de grafiek van y.
We zien dat we inderdaad bij $x = 2$ te maken hebben met een minimum.



d.
$y'(4) = 6 . 16 - 18 . 6 + 12 = 36$ $\Rightarrow$ De vergelijking is nu : $y = 36x + b$
Het raakpunt is $(4, f(4)) = (4, 36)$ Invullen geeft : $36 = 144 + b \Leftrightarrow b = -108$ $\Rightarrow$
De gevraagde raaklijn is nu : $y = 36x - 108$

6. $q = 80 + 25p - 5p^{1,4}$ €° p is de prijs en $0 \leq p \leq 60$

a. $q' = \dfrac{dq}{dp} = 25 - 7p^{0,4} \Rightarrow q'(12{,}50) \approx 5{,}78 \;\Rightarrow$

De gevraagde snelheid is 5,78 euro per stuk.

b.

Voor het maximum moet gelden $q' = 0 \Rightarrow$ $q' = 25 - 7p^{0,4} = 0$

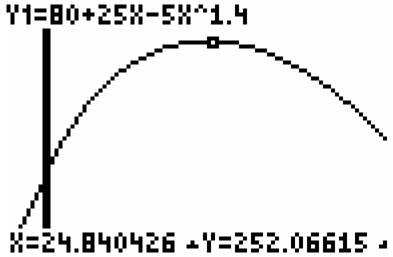
Voer in : $y_1 = 25 - 7x^{0,4}$

Met de optie zero vinden we $x = p \approx 24{,}10$

De schets geeft inderdaad bij x = p een maximum.

De maximale weekverkoop is dan $q(24{,}10)$ en dat is bij benadering 252,18. $\Rightarrow$

De maximale weekverkoop is ongeveer 252 stuks.



7.

a. $y = 4x + \dfrac{1}{x} + 2 = 4x + x^{-1} + 2$ Voor het minimum geldt $y' = 0 \Rightarrow$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = 4 - x^{-2} = 4 - \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow$ y' = 0 geeft : $4 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

$x = -0{,}5 \vee x = 0{,}5$ Nu de schets.

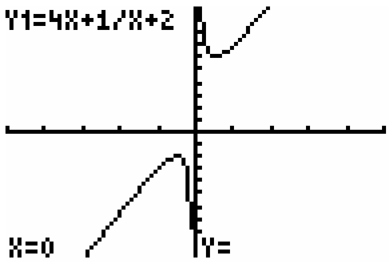
Het window is hier [-5 , 5] X [-10 , 10]

Uit de schets en de berekening volgt nu :

Maximum $y(-0{,}5) = -2$ en

minimum $y(0{,}5) = 6$.

Het minimum is dus 6.



b.

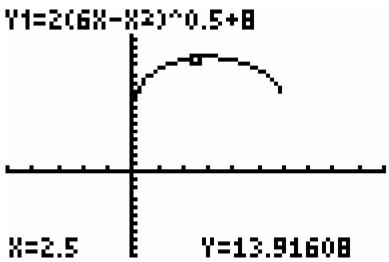
$y = 2\sqrt{6x - x^2} + 8$ Voor het maximum geldt : $y' = 0 \Rightarrow$

$y' = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{6x - x^2}} \cdot (6 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{6 - 2x}{\sqrt{6x - x^2}} = 0 \Rightarrow 6 = 2x \Leftrightarrow x = 3$

Een schets met window [-5 , 10] X [-10 , 20] geeft :

Uit de schets en de berekening volgt :

Maximum $y(3) = 14$



8. $E(n) = 0{,}48n - an^2$ met $0 < E < 10$ en $0 < a < 0{,}2$

a. $a = 0{,}006 \Rightarrow$ $E(n) = 0{,}48n - 0{,}006n^2 \Rightarrow E'(n) = 0{,}48 - 0{,}12n$

Nu geldt $E'(40) = 0{,}48 - 0{,}48 = 0$

Het is een bergparabool. $\Rightarrow$ Er is dus inderdaad een maximum $n = 40$.

b.

Nu is het maximum bij $n = 16$ $E'(n) = 0{,}48 - 2an$

Uit het gegeven volgt dat $E'(16) = 0 \Rightarrow 0{,}48 - 2a.16 = 0 \Leftrightarrow 32a = 0{,}48 \Leftrightarrow a = 0{,}015$

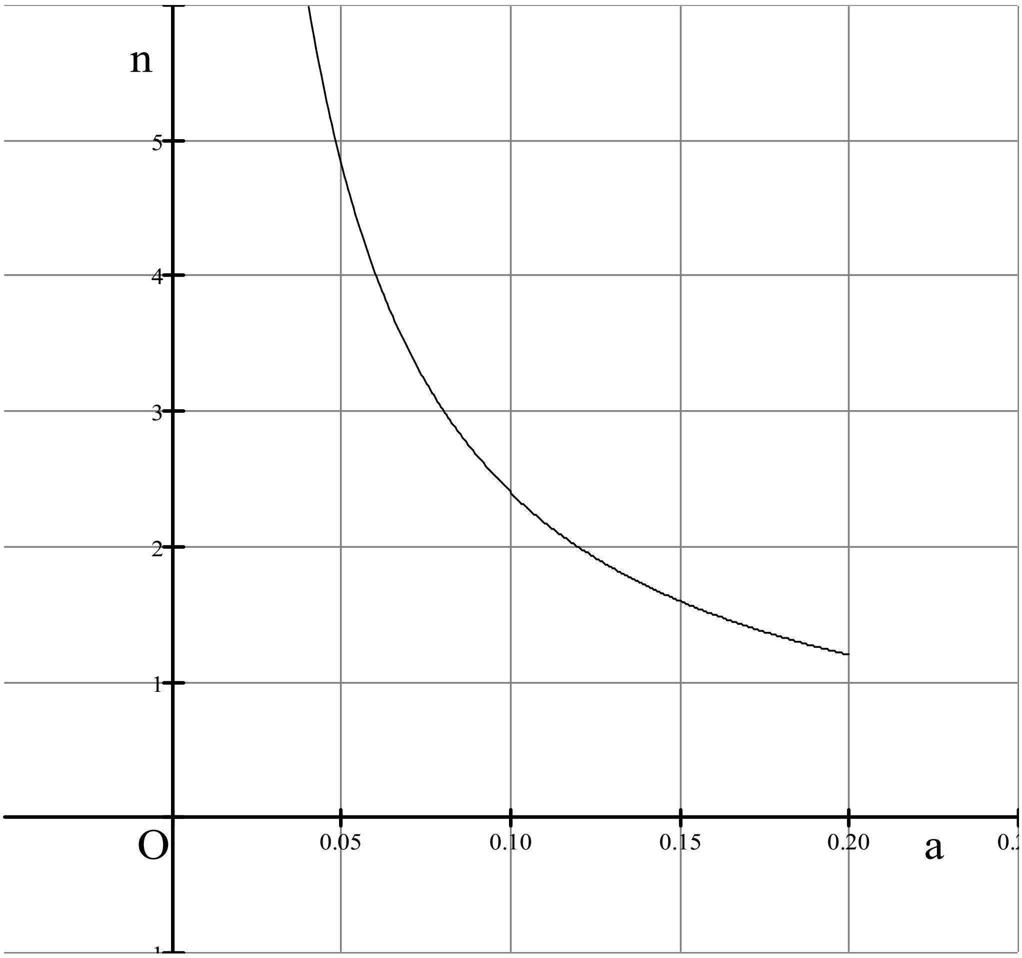
c.

Voor de maximale effectiviteit volgt : $E'(n) = 0 \Leftrightarrow 0{,}48 - 2an = 0$

Nu hiervan een functie van a maken. $\Rightarrow$

$$2an = 0{,}48 \Leftrightarrow n = \frac{0{,}48}{2a} \Leftrightarrow n = \frac{0{,}24}{a}$$

a	0	0,05	0,10	0,15	0,20
n	Geen waarde	4,8	2,4	1,6	1,2



9.

$$K = 10^{-6}q^3 - 3\cdot 10^{-3}q^2 + 5q + 1000 \Rightarrow K' = 3\cdot 10^{-6}q^2 - 6\cdot 10^{-3}q + 5$$

Minimale snelheid $\Rightarrow$ Het minimum van K'. $\Rightarrow$

K' moet dus gedifferentieerd worden. $\Rightarrow$

$$K'' = 6\cdot 10^{-6}q - 6\cdot 10^{-3} = 0 \Leftrightarrow 6\cdot 10^{-6}q = 6\cdot 10^{-3} \Leftrightarrow q = 1000$$

K'is een dalparabool. Er is dus bij $q = 1000$ sprake van een minimum. $\Rightarrow$

De minimale snelheid is dus K'(1000) = 2. $\Rightarrow$

De minimale snelheid is dus 2 euro per stuk.

10. $N(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ met $0 \leq t \leq 5$.

a. $N'(t) = -3t^2 + 12t + 15$ Maximale snelheid. $\Rightarrow$ N' moeten we gaan differentieren. $\Rightarrow$
$N''(t) = -6t + 12 \Rightarrow N''(t) = 0$ geeft $t = 2$.
We zien dat het een bergparabool is. Dus een maximum. $\Rightarrow$
Na 2 uur is de snelheid maximaal.

b. $N'(0) = 15$ $\Rightarrow$ Nu moet gelden. Wanneer is N' weer gelijk aan 15. $\Rightarrow$
$-3t^2 + 12t + 15 = 15 \Leftrightarrow -3t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t(-3t + 12) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4 \Rightarrow$
Na 4 uur is de snelheid weer zoals op $t = 0$ en is er dus weer een pauze.

11. Zo te zien neemt de helling af en dan neemt de helling (marginale kosten) weer toe.Verder is de grafiek steeds stijgend . Daarom moet de hellingfunctie positief zijn.
Bij grafiek C is dat het geval.

12.

a. $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x-as en is dus negatief $\Rightarrow$ y daalt dus.

b. Hoogste punt van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de x-as. $\Rightarrow$ y van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

c. Hoogste punt van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de x-as. $\Rightarrow$ De grafiek van y gaat van afnemend dalend naar toenemend dalend.

d. Laagste punt van $\frac{dy}{dx}$ boven de x-as. $\Rightarrow$ y van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

e. $\frac{dy}{dx}$ is dalend en ligt boven de x-as. $\Rightarrow$ De grafiek van y is dus afnemend stijgend.

f. $\frac{dy}{dx}$ is stijgend en snijdt de x-as. $\Rightarrow$ De grafiek van y gaat van dalen over in stijgen en heeft dus een minimum.

13.

a. Grafiek van y is afnemend dalend. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ stijgt maar is < 0. $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$ ligt dus onder de x-as en stijgt.

b. Grafiek van y heeft een laagste punt. D.w.z. dat de grafiek van y eerst daalt en dan weer stijgt. Dus de afgeleide is eerst negatief en dan 0 en dan positief. $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ is stijgend en snijdt de x-as.

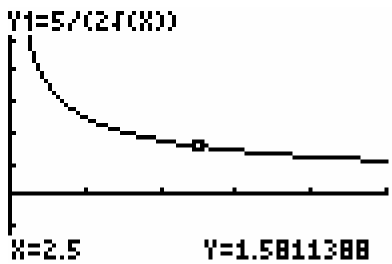
c. De grafiek van y is afnemend stijgend. $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ daalt ,maar $\dfrac{dy}{dx}$ is > 0. $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ daalt en ligt boven de x-as.

d. De grafiek van y gaat van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ neemt eerst af en neemt dan weer toe en $\dfrac{dy}{dx}$ is positief. $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}$ heeft een minimum en ligt boven de x-as.

14. Gegeven : $y = 5\sqrt{x} - 3$

$$y = 5\sqrt{x} - 3 \;\Rightarrow\; y' = 5.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

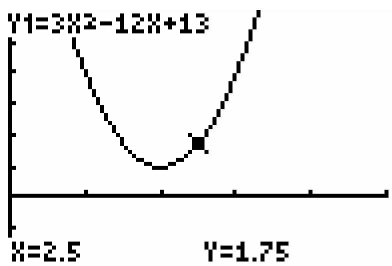
Uit de schets zien we dat de afgeleide boven de x-as ligt en verder daalt. $\Rightarrow$ Er is dus bij de grafiek van y een afnemende stijging.



15. Gegeven : $K = q^3 - 6q^2 + 13q + 15$ met K in euro's en q in kg.

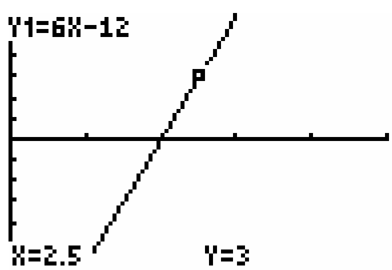
a. $\dfrac{dK}{dq} = 3q^2 - 12q + 13$ Nu de schets van K '$\Rightarrow$

We zien dat de afgeleide groter dan 0 is en dus stijgt K. Vervolgens zien we dat K 'eerst afneemt en dan weer toeneemt . Dat betekent voor K dat K eerst afnemend stijgend is en dan weer toenemend stijgend is.



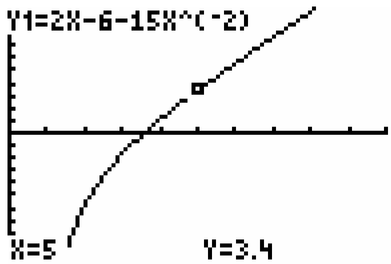
b. $MK = \dfrac{dK}{dq} = 3q^2 - 12q + 13$ en $MK' = K'' = 6q - 12$

Uit de schets van MK'zien we dat MK ' eerst negatief is dan gelijk is aan 0 en dan positief is. Dat betekent dat de grafiek van MK eerst daalt dan horizontaal is en vervolgens stijgt. Er is dan dus sprake van een minimum bij MK.



c. $GK = \frac{K}{q} = \frac{q^3 - 6q^2 + 13q + 15}{q} = q^2 - 6q + 13 + \frac{15}{q} = q^2 - 6q + 13 + 15q^{-1} \Rightarrow$

GK '$= 2q - 6 - 15q^{-2}$ Nu de schets van GK ':

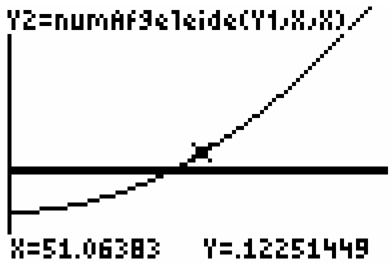


We zien dan dat GK 'eerst negatief is dan gelijk aan 0 is en dan weer positief is. Dit betekent voor GK dat de grafiek van GK eerst daalt dan horizontaal is en dan weer gaat stijgen.
GK heeft daarom een minimum.

16. Gegeven : $N = 0{,}000045t^3 - 0{,}2295t + 100{,}84$ met t in jaren en $t = 0$ in 1940.

a. 2003 $\Rightarrow t = 63$ Voer in $y_1 = 0{,}000045x^3 - 0{,}2295x + 100{,}84 \Rightarrow y_1(63) = N(63) \approx 97{,}63 \Rightarrow$ De verhouding tussen het aantal vrouwen en het aantal mannen is dan 100 : 97,63
Het aantal mannen in 2003 is dan dus : $\frac{97{,}63}{197{,}63}.290 \approx 143{,}3$ miljoen.

b. $\frac{dN}{dt} = 0{,}000135t^2 - 0{,}2295$ De schets geeft :



We zien dan dat $\frac{dN}{dt}$ eerst negatief is dan gelijk aan 0 is en dan weer positief is. Dit betekent voor N dat de grafiek van N eerst daalt dan horizontaal is en dan weer gaat stijgen.
N heeft daarom een minimum.

c. $\frac{dN}{dt} = 0$ geeft : $0{,}000135t^2 - 0{,}2295 = 0 \Leftrightarrow 0{,}000135t^2 = 0{,}2295 \Leftrightarrow 135t^2 = 229500 \Leftrightarrow$
$t^2 = 1700 \Rightarrow t \approx 41{,}2$. We weten dat er een minimum is bij N. $\Rightarrow$ Er is dus een minimum bij $t \approx 41{,}2$ dus in het jaar 1981. $\Rightarrow N_{\min} \approx 94{,}5 \Rightarrow$ Het percentage mannen is dan dus :
$\frac{94{,}5}{194{,}5}.100\% \approx 48{,}6$ %.

17. $f(x) = x^2 \quad g(x) = 2x + 1$ en $p(x) = f(x).g(x) = 2x^3 + x^2$

a. $p(x) = 2x^3 + x^2 \Rightarrow p'(x) = 6x^2 + 2x$

b. $f'(x) = 2x \quad g'(x) = 2$ en $f'(x).g'(x) = 2x.2 = 4x$

c. Uit a en b volgt duidelijk dat $p'(x)$ niet gelijk is aan $f'(x).g'(x)$

18.

a. $f(x) = x(2x+1)^3 \Rightarrow f'(x) = 1\cdot(2x+1)^3 + x\cdot 3(2x+1)^2\cdot 2 = (2x+1)^3 + 6x(2x+1)^2$

b.

$$g(x) = x\cdot\sqrt{1-3x} \Rightarrow$$
$$g'(x) = 1\cdot\sqrt{1-3x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-3x}}\cdot(-3) = \sqrt{1-3x} - \frac{3x}{2\sqrt{1-3x}}$$

c.

$$h(x) = 5x + x^2(x^2+1)^{1,8} \Rightarrow$$
$$h'(x) = 5 + 2x(x^2+1)^{1,8} + 1,8x^2(x^2+1)^{0,8}\cdot 2x = 5 + 2x(x^2+1)^{1,8} + 3,6x^3(x^2+1)^{0,8}$$

d.

$$k(x) = 6(2x-1)\cdot\sqrt{2x-1} = (12x-6)\cdot\sqrt{2x-1} \Rightarrow$$
$$k'(x) = 12\cdot\sqrt{2x-1} + (12x-6)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2 = 12\cdot\sqrt{2x-1} + \frac{12x-6}{\sqrt{2x-1}}$$

19.

a.

$$y = (x+3)(2x-5)^2 \Rightarrow$$
$$y' = 1\cdot(2x-5)^2 + (x+3)\cdot 2(2x-5)\cdot 2 = (2x-5)^2 + 4\cdot(x+3)(2x-5)$$

b.

$$y = (x^2-1)\sqrt{x^2+4} \Rightarrow$$
$$y' = 2x\sqrt{x^2+4} + (x^2-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+4} + \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+4}}$$

c.

$$K = 7q\sqrt{100-q} \Rightarrow$$
$$K' = 7\sqrt{100-q} + 7q\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{100-q}}\cdot(-1) = 7\sqrt{100-q} - \frac{7q}{2\cdot\sqrt{100-q}}$$

d.

$$A = 5t^3 - t\sqrt{2-3t} \Rightarrow$$
$$A' = 15t^2 - \left(1\cdot\sqrt{2-3t} + t\cdot\frac{1}{2\sqrt{2-3t}}\cdot(-3)\right) = 15t^2 - \sqrt{2-3t} + \frac{3t}{2\sqrt{2-3t}}$$

20

a. $y = 5x^3 \Rightarrow y' = 5\cdot 3x^2 = 15x^2$

b. $y = a\cdot f(x) \Rightarrow y' = 0\cdot f(x) + a\cdot f.(x) = a\cdot f'(x)$

21.

a. $8(x+1)^2+3(x+1)=(x+1)\big(8(x+1)+3\big)=(x+1)(8x+11)$

b. $6(2x-1)^5-2(2x-1)^4=(2x-1)^4\big(6(2x-1)-2\big)=(2x-1)^4(12x-8)$

c. $(x+3)\sqrt{5-x}-2\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}\cdot\big((x+3)-2\big)=\sqrt{5-x}\cdot\big(x+1\big)$

d.

$$(2x-3)(x-7)^5-(x-7)^3=(x-7)^3\cdot\big((2x-3)(x-7)^2-1\big)=(x-7)^3\big((2x-3)(x^2-14x+49)-1\big)=$$
$$(x-7)^3\cdot\big(2x^3-28x^2+98x-3x^2+42x-147-1\big)=(x-7)^3\cdot\big(2x^3-31x^2+140x-148\big)$$

22.

a. $\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}}$

b.

$$\sqrt{1-x}+\frac{3}{\sqrt{1-x}}=\sqrt{1-x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{3}{\sqrt{1-x}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x}}+\frac{3}{\sqrt{1-x}}=\frac{4-x}{\sqrt{1-x}}$$

c.

$$\sqrt{x^2+3}+\frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{5x}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{x^2+5x+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

d.

$$2\sqrt{2x-1}-\frac{4}{\sqrt{2x-1}}=2\sqrt{2x-1}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}-\frac{4}{\sqrt{2x-1}}=\frac{2(2x-1)}{\sqrt{2x-1}}-\frac{4}{\sqrt{2x-1}}=\frac{4x-6}{\sqrt{2x-1}}$$

23.

a.
$$f(x)=4x(3x-1)^5\Rightarrow$$
$$f'(x)=4(3x-1)^5+4x\cdot5(3x-1)^4\cdot3=(3x-1)^4\big(4(3x-1)+60x\big)=(3x-1)^4(72x-4)$$

b.
$$g(x)=x(1-x^2)^4\Rightarrow$$
$$g'(x)=1\cdot(1-x^2)^4+x\cdot4(1-x^2)^3\cdot(-2x)=(1-x^2)^3\cdot\big((1-x^2)-8x^2\big)=(1-x^2)^3\cdot\big(1-9x^2\big)$$

c.
$$h(x)=x\cdot\sqrt{2-2x}\Rightarrow\qquad h'(x)=1\cdot\sqrt{2-2x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2-2x}}\cdot(-2)=$$
$$\sqrt{2-2x}-\frac{x}{\sqrt{2-2x}}=\sqrt{2-2x}\cdot\frac{\sqrt{2-2x}}{\sqrt{2-2x}}-\frac{x}{\sqrt{2-2x}}=\frac{2-2x-x}{\sqrt{2-2x}}=\frac{2-3x}{\sqrt{2-2x}}$$

24. Gegeven: $f(x)=x\sqrt{3+2x}$

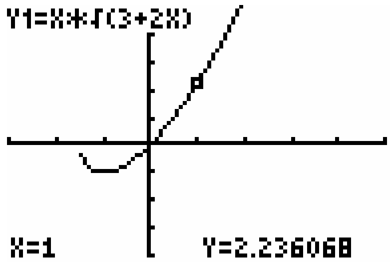
a.

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{3+2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3+2x}} \cdot 2 =$$

$$\sqrt{3+2x} + \frac{x}{\sqrt{3+2x}} = \sqrt{3+2x} \cdot \frac{\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3+2x}} + \frac{x}{\sqrt{3+2x}} = \frac{3+2x+x}{\sqrt{3+2x}} = \frac{3+3x}{\sqrt{3+2x}}$$

b.

$f'(x) = 0$ geeft de vergelijking $3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -1$
Nu een **schets** van de grafiek van f. Bij $x = -1$ is er inderdaad sprake van een maximum. $\Rightarrow$
max $f(-1) = -1$



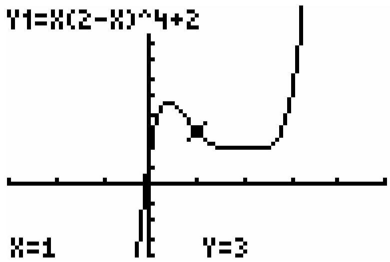
c.

r.c. $= f'(3) = 4 \Rightarrow y = 4x + b$ Het raakpunt is $(3, f(3)) = (3, 9)$. Invullen in de vergelijking geeft : $9 = 12 + b \Leftrightarrow b = -3 \Rightarrow$ De vergelijking is dus : $y = 4x - 3$.

25. Gegeven : $g(x) = x(2-x)^4 + 2$

a. $g'(x) = 1 \cdot (2-x)^4 + x \cdot 4(2-x)^3 \cdot (-1) = (2-x)^3\left((2-x) - 4x\right) = (2-x)^3(2-5x)$

b. $g'(x) = 0$ geeft $2 - x = 0 \vee 2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0{,}4$.
Nu een **schets** van de grafiek van g.
$\Rightarrow$ max $g(0{,}4) = 4{,}62144$ en min $g(2) = 2$.



c. Snijpunt met de y-as geeft $x = 0 \Rightarrow$ snijpunt is $(0, 2) \Rightarrow g'(0) = 16$
Nu is dus de voorlopige vergelijking : $y = 16x + b$ Deze lijn gaat door $(0,2) \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$
De vergelijking is nu : $y = 16x + 2$.

26. Gegeven : $t(x) = 3x + 2$; $n(x) = x + 2$ en $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$

a. $t'(x) = 3$; $n'(x) = 1$ en $\dfrac{t'(x)}{n'(x)} = \dfrac{3}{1} = 3$

b. Dit kan nooit , want de afgeleide van een breuk kan nooit constant zijn. Je zou dan krijgen ,dat een breuk van twee functies een rechte lijn is. Dat is natuurlijk niet het geval.

27.

a. $$y = \frac{x+1}{x-4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1.(x-4) - 1.(x+1)}{(x-4)^2} = \frac{x-4-x-1}{(x-4)^2} = \frac{-5}{(x-4)^2}$$

b. $$y = 7x + \frac{-2x+3}{x+7} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7 + \frac{-2.(x+7) - 1.(-2x+3)}{(x+7)^2} = 7 + \frac{-2x-14+2x-3}{(x+7)^2} = 7 - \frac{17}{(x+7)^2}$$

c.

$$y=\frac{3x^2}{6-x}+4x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{6x(6-x)-3x^2.(-1)}{(6-x)^2}+12x^2=\frac{36x-6x^2+3x^2}{(6-x)^2}+12x^2=\frac{36x-3x^2}{(6-x)^2}+12x^2$$

d. $$y=\frac{4x+x^3}{8x^2-5}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(4+3x^2)(8x^2-5)-(4x+x^3)16x}{\left(8x^2-5\right)^2}=$$

$$\frac{32x^2-20+24x^4-15x^2-64x^2-16x^4}{\left(8x^2-5\right)^2}=\frac{8x^4-47x^2-20}{\left(8x^2-5\right)^2}$$

28.

a. $$A=\frac{-2}{3+2t}+5t\Rightarrow \frac{dA}{dt}=\frac{0.(3+2t)-2.(-2)}{(3+2t)^2}+5=\frac{4}{(3+2t)^2}+5$$

b. $$K=2q-\frac{1}{q+8}\Rightarrow \frac{dK}{dq}=2-\frac{0.(q+8)-1.1}{(q+8)^2}=2-\frac{-1}{(q+8)^2}=2+\frac{1}{(q+8)^2}$$

c. $$P=\left(\frac{2}{1+q}\right)^3\Rightarrow \frac{dP}{dq}=3\cdot\left(\frac{2}{1+q}\right)^2\cdot\left(\frac{0-1\cdot 2}{(1+q)^2}\right)=\frac{4}{(1+q)^2}\cdot\frac{-6}{(1+q)^2}=\frac{-24}{(1+q)^4}$$

d.

$$N=\left(\frac{2t}{t-1}\right)^4\Rightarrow \qquad \frac{dN}{dt}=4\cdot\left(\frac{2t}{t-1}\right)^3\cdot\left(\frac{2(t-1)-1\cdot 2t}{(t-1)^2}\right)=$$

$$4\cdot\frac{8t^3}{(t-1)^3}\cdot\frac{2t-2-2t}{(t-1)^2}=\frac{32t^3}{(t-1)^3}\cdot\frac{-2}{(t-1)^2}=\frac{-64t^3}{(t-1)^5}$$

29. Gegeven: $P=150-\dfrac{50}{1+x}$ met $0\le x\le 10$ en x is de hoeveelheid insecticide per oogst.

a. De procentuele toename is dan:

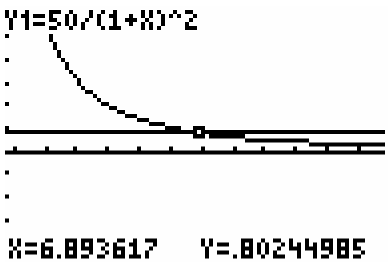
$$\frac{P(6,5)-P(4,5)}{P(4,5)}.100\%=\frac{143,33-140,91}{140,91}.100\%\approx 1,7\ \%.$$

b. $$P=150-\frac{50}{1+x}\Rightarrow \frac{dP}{dx}=-\frac{0.(1+x)-1.50}{(1+x)^2}=-\frac{-50}{(1+x)^2}=\frac{50}{(1+x)^2}$$

De afgeleide is altijd positief want de teller is positief en de noemer is ook altijd positief omdat de noemer een kwadraat is. Dit betekent dat de grafiek van P steeds stijgend is.

Verder geldt dat bij toenemende waarden van x de noemer steeds toeneemt dus wordt de waarde van de teller steeds kleiner. De afgeleide daalt dus. Daarom is de grafiek van P afnemend stijgend.

c. Snelheid is minder dan 0,8 $\Rightarrow \dfrac{dP}{dx} < 0{,}8 \Leftrightarrow \dfrac{50}{(1+x)^2} < 0{,}8$



Voer in : $y_1 = \dfrac{50}{(1+x)^2}$ en $y_2 = 0{,}8$ en neem b.v. het window [0 , 12] X [-5 , 6]

Met intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 6{,}9$. Uit de schets lezen we af: $\dfrac{dP}{dx} < 0{,}8$ voor $x > 6{,}9$

30. Gegeven: $q = \dfrac{20p+1600}{4p+5}$ met p is de prijs in euro's en q is het aantal verkochte kisten per dag.

a. Er moet gelden $q = 20 \Rightarrow$

$$\frac{20p+1600}{4p+5} = 20 \Leftrightarrow 20p+1600 = 20(4p+5) \Leftrightarrow 20p+1600 = 80p+100 \Leftrightarrow -60p = -1500 \Rightarrow$$

$p = 25 \Rightarrow$ De prijs is dan 25 euro.

b. $$q = \frac{20p+1600}{4p+5} \Rightarrow \frac{dq}{dp} = \frac{20.(4p+5)-4.(20p+1600)}{(4p+5)^2} = \frac{80p+100-80p-6400}{(4p+5)^2} = -\frac{6300}{(4p+5)^2}$$

De teller is positief en de noemer ook positief (kwadraat) .
Door het minteken is de afgeleide negatief . Daarom neemt de verkoop af bij het toenemen van de prijs.

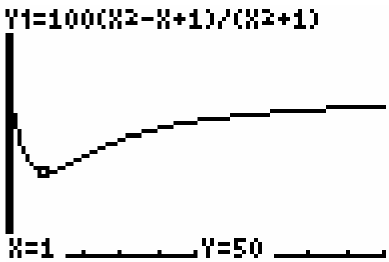
c. $\left[\dfrac{dq}{dp}\right]_{p=18} = -\dfrac{6300}{(4.18+5)^2} \approx$ -1,06 $\Rightarrow$ De verkoop neemt af met 1,06 kist per euro.

31. $P = \dfrac{100(t^2-t+1)}{t^2+1}$ met P in procenten en t in weken.

a. Voer in : $y_1 = \dfrac{100(x^2-x+1)}{x^2+1}$ en $y_2 =$ nDeriv(y_1 , x , x) $\Rightarrow$ De snelheid na 4 weken is nu :

$\left[\dfrac{dP}{dt}\right]_{t=4} =$ nDeriv(y_1 , x , 4) $\approx 5{,}19 \Rightarrow$ De snelheid is dan 5,19% per week = 0,7 % per dag.

b.



$$P = \frac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{100.(2t-1).(t^2+1) - 2t.100.(t^2 - t + 1)}{(t^2+1)^2} =$$

$$\frac{200t^3 + 200t - 100t^2 - 100 - 200t^3 + 200t^2 - 200t}{(t^2+1)^2} = \frac{100t^2 - 100}{(t^2+1)^2} \Rightarrow$$

$\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=1} = \frac{100.1^2 - 100}{(1^2+1)^2} = 0$ Uit de schets volgt verder dat er bij $x = t = 1$ een minimum is.

$\Rightarrow$

Het zuurstofgehalte is na 1 week minimaal.

c. $P = 98 \Rightarrow \frac{100(t^2 - t + 1)}{t^2 + 1} = 98$

Voer verder in $y_3 = 98$. en neem b.v. het window [0 , 60] X [0 , 110]
met intersect vinden we $x \approx 0{,}02$ en $x \approx 49{,}98$.
De waarde $t = 0{,}02$ moeten we niet hebben $\Rightarrow$ 98% krijgen we na ongeveer 350 dagen.

Opmerking. Het eerste snijpunt is in dit window niet te zien. Als $0 \le x \le 10$ gekozen is in het window, dan is dit snijpunt wel te zien.

d. De snelheid na 8 weken is : $\left[\frac{dP}{dt}\right]_{t=8} \approx 1{,}4911$ % per week = 0,213 % per dag.

en $P(8) = 87{,}69$.
De snelheid verandert daarna niet.
Het zuurstofgehalte moet nog stijgen met 100% - 87,69% = 12,31 %.
Het aantal dagen dat nog nodig is is dan : $\frac{12{,}31}{0{,}213} = 57{,}79 \Rightarrow$

Er zijn dan nog ongeveer 58 dagen nodig.
Vanaf het oorspronkelijke begin hebben we in totaal 8 . 7 + 58 = 114 dagen nodig.

32.

a. $y = 4(3x-2)^3 \Rightarrow y' = 12(3x-2)^2 \cdot 3 = 36(3x-2)^2$

b. $y = \frac{x+8}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x+8)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 16x}{x^4} = \frac{-x^2 - 16x}{x^4} = \frac{-x-16}{x^3}$

c. $y = 4\sqrt{x^2 - 3} \Rightarrow y' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-3}} \cdot 2x = \frac{4x}{\sqrt{x^2-3}}$

d.

$$y = 6x\sqrt{5-4x} \Rightarrow \quad y' = 6\sqrt{5-4x} + 6x \cdot \frac{1}{2\sqrt{5-4x}} \cdot (-4) = 6\sqrt{5-4x} - \frac{12x}{\sqrt{5-4x}} =$$

$$6\sqrt{5-4x} \cdot \frac{\sqrt{5-4x}}{\sqrt{5-4x}} - \frac{12x}{\sqrt{5-4x}} = \frac{6(5-4x)}{\sqrt{5-4x}} - \frac{12x}{\sqrt{5-4x}} = \frac{30-36x}{\sqrt{5-4x}}$$

e. $y=\frac{3}{(2x-7)^4} \Rightarrow y'=\frac{0-4(2x-7)^3\cdot 2\cdot 3}{(2x-7)^8}=\frac{-24}{(2x-7)^5}$

f. $y=4x^2\cdot\sqrt{x}=4x^{2\frac{1}{2}} \Rightarrow y'=10x^{1\frac{1}{2}}=10x\sqrt{x}$

g. $y=5x+\sqrt{1-x} \Rightarrow y'=5+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)=5-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

h.

$$y=\frac{3}{x^2}+\frac{2}{3x}=\frac{9}{3x^2}+\frac{2x}{3x^2}=\frac{9+2x}{3x^2} \Rightarrow$$

$$y'=\frac{2\cdot 3x^2-6x\cdot(9+2x)}{9x^4}=\frac{6x^2-54x-12x^2}{9x^4}=\frac{-6x^2-54x}{9x^4}=\frac{-6x-54}{9x^3}$$

i. $y=5x\sqrt{5x}=5x\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}=5\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}=5\sqrt{5}\cdot x^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow y'=1\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{5}\cdot x^{\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5x}$

33.

a.

$$f(x)=x^2(1-x)^6 \Rightarrow$$

$$f'(x)=2x(1-x)^6+x^2\cdot 6\cdot(1-x)^5\cdot(-1)=(1-x)^5\left(2x(1-x)-6x^2\right)=(1-x)^5\left(2x-8x^2\right)=$$

$$x(1-x)^5(2-8x)$$

b.

$$g(x)=2x^2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow$$

$$g'(x)=4x\sqrt{1-x^2}+2x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=4x\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$\frac{4x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4x-4x^3-2x^3}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{4x-6x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

c.

$$h(x)=\frac{x}{(2x-1)^3} \Rightarrow h'(x)=\frac{1\cdot(2x-1)^3-x\cdot 3(2x-1)^2\cdot 2}{(2x-1)^6}=\frac{2x-1-6x}{(2x-1)^4}=\frac{-4x-1}{(2x-1)^4}$$

34. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$

a. $f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x-1)}{\left(x+2\right)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$

b. $f'(x)>0$ voor elke x omdat zowel de teller als de noemer altijd positief zijn voor alle x ongelijk aan -2.

c. Aangezien de afgeleide steeds positief is , geldt dat f steeds stijgend is.
Daarom heeft f geen extreme waarde.

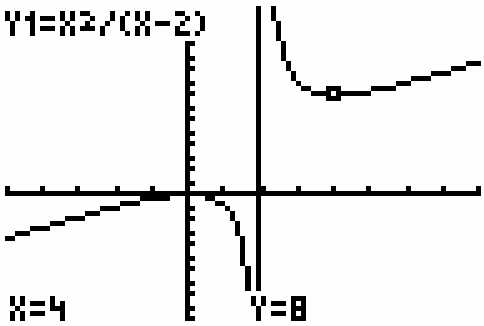
35. Gegeven: $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

a. Voor de extreme waarden is nodig: $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$y = \frac{x^2}{x-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x.(x-2)-1.x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$



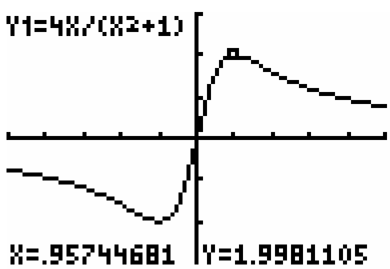
Zie nu de schets . Dan blijkt dat er bij $x = 0$ een maximum is en bij $x = 4$ een minimum.
De extreme waarden zijn dus :
max $y(0) = 0$ en min $y(4) = 8$.

b. Raaklijn in $x = 3$ Er geldt $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3} = \dfrac{9-4.3}{(3-2)^2} = -3 \Rightarrow$ Stel de vergelijking is nu :
$y = -3x + b$ Het raakpunt is bij $x = 3$ dan $y = 9$. Nu dit punt invullen in de vergelijking van de lijn. $\Rightarrow$ $9 = -3 . 3 + b \Leftrightarrow b = 18$ $\Rightarrow$ De gevraagde vergelijking is : $y = -3x + 18$.

36.

a. $$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4\left(x^2+1\right)-2x\cdot 4x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

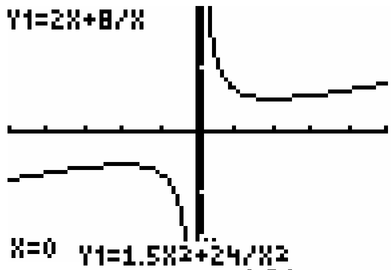
Voor de extreme waarde(n) geldt dat $f'(x) = 0 \Rightarrow 4-4x^2 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$
Nu eens schets van de grafiek van f en aflezen . $\Rightarrow$
max $f(1) = 2$ en min. $f(-1) = -2$.



b. $y = 2x + \dfrac{8}{x} = 2x + 8 \cdot x^{-1}$ Extreme waarden $\Rightarrow y'(x) = 2 - 8 \cdot x^{-2} = 2 - \dfrac{8}{x^2} = 0$

$\frac{8}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Nu weer een schets van de grafiek van y en weer aflezen. $\Rightarrow$
Max $y(-2) = -8$ en min. $y(2) = 8$.

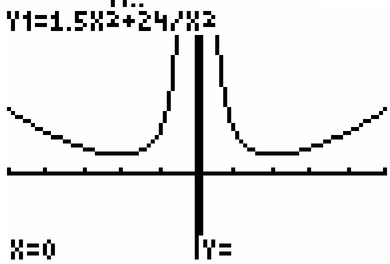


c. $y = 1{,}5x^2 + \frac{24}{x^2} = 1{,}5x^2 + 24 \cdot x^{-2}$

Extreme waarden $\Rightarrow y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$3x - 48x^{-3} = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{48}{x^3} \Rightarrow 3x^4 = 48 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

Nu weer een schets van de grafiek van y en weer aflezen. $\Rightarrow$
Min $y(-2) = -12$ en min. $y(2) = 12$.



37. $C = \frac{0{,}16t}{t^2 + 4t + 4}$ met C in mg per cm^3 en t in uren.

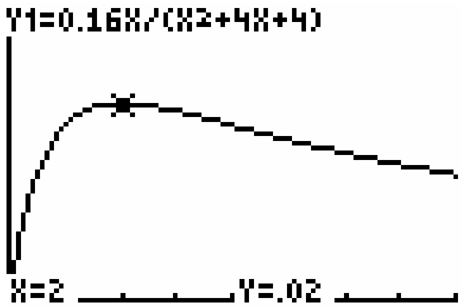
a.

$$\frac{dC}{dt} = \frac{0{,}16(t^2+4t+4) - (2t+4)(0{,}16t)}{(t^2+4t+4)^2} = \frac{0{,}16t^2 + 0{,}64t + 0{,}64 - 0{,}32t^2 - 0{,}64t}{(t^2+4t+4)^2} = \frac{-0{,}16t^2 + 0{,}64}{(t^2+4t+4)^2}$$

Er geldt: $\left[\frac{dC}{dt}\right]_{t=0} = \frac{0{,}64}{16} = 0{,}04 > 0 \Rightarrow$ De concentratie neemt dan meteen toe.

b. Maximaal $\Rightarrow \frac{dC}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-0{,}16t^2 + 0{,}64}{(t^2+4t+4)^2} = 0 \Leftrightarrow -0{,}16t^2 + 0{,}64 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow$

$t = -2$ (vervalt) $\vee\ t = 2$. Nu weer de schets van C. $\Rightarrow$
Er is dus duidelijk een maximum bij $x = t = 2$. $\Rightarrow$
De concentratie is dus maximaal na twee uur.



c. $\left[\frac{dC}{dt}\right]_{t=5} \approx -0{,}0014$ en $\left[\frac{dC}{dt}\right]_{t=10} \approx -0{,}00074$

We krijgen dus: $\frac{-0{,}0014}{-0{,}00074} \approx 1{,}89$ $\Rightarrow$ De snelheid na 5 uur is bij benadering ongeveer twee keer zo groot als de snelheid bij $t = 10$.

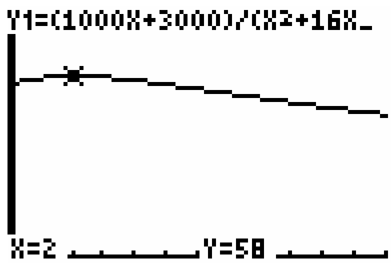
d. Als $t = 24$ dan $C \approx 0{,}00568 > 0{,}005 \Rightarrow$
De aanwezigheid van het medicijn is na 24 uur nog steeds aantoonbaar.

38. $V = \dfrac{1000t + 3000}{t^2 + 16t + 64} + 8$ met V is de verkoop per maand en t is de tijd in maanden na stoppen van de reclame.

a. Bij stoppen $\Rightarrow t = 0 \Rightarrow V(0) = \dfrac{3000}{64} + 8 \approx 54{,}9 \Rightarrow$
De verkoop was direct na stoppen ongeveer 55 stuks per maand.

b.
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1000.(t^2+16t+64) - (2t+16).(1000t+3000)}{(t^2+16t+64)^2} =$$
$$\frac{1000t^2 + 16000t + 64000 - 2000t^2 - 16000t - 6000t - 48000}{(t^2+16t+64)^2}$$
$$= \frac{-1000t^2 - 6000t + 16000}{(t^2+16t+64)^2} \Rightarrow \left[\frac{dV}{dt}\right]_{t=0} = \frac{16000}{64^2} \approx 3{,}9 > 0 \Rightarrow$$
De verkoop stijgt nog steeds direct na stoppen van de reclame.

c. De omzet gaat dalen als de afgeleide van positief naar negatief gaat. Dus er moet dan gelden :
$$\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{-1000t^2 - 6000t + 16000}{(t^2+16t+64)^2} = 0 \Rightarrow$$
$$-1000t^2 - 6000t + 16000 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 16 = 0 \Leftrightarrow (t+8)(t-2) = 0 \Rightarrow$$
t = -8 (kan niet) of t = 2
Uit de schets volgt dat er bij t = 2 een maximum is. Daaruit volgt dat de verkoop na 2 maanden zal gaan dalen.



d. Op den duur d.w.z. na vele maanden . Er geldt :
$V(1000) \approx 8{,}99$; $V(5000) \approx 8{,}20$; $V(10000) \approx 8{,}10$; $V(40000) \approx 8{,}03$ en $V(100000) \approx 8{,}01$
$\Rightarrow$ Uiteindelijk is de verkoop nog maar 8 stuks per maand.

39. $T = 37 + \dfrac{45t}{t^2 + 70}$ met T in $^\circ$C en t in uren.

a. Voer in : $y_1 = 37 + \dfrac{45x}{x^2 + 70}$
Het 4^e uur dus t van 3 naar 4. $T(4) - T(3) = y_1(4) - y_1(3) = 39{,}093 - 38{,}709 \approx 0{,}38 \Rightarrow$
De temperatuur nam met 0,38 ºC toe.

b. $\frac{dT}{dt}=\frac{45(t^2+70)-2t.45t}{(t^2+70)^2}=\frac{45t^2+3150-90t^2}{(t^2+70)^2}=\frac{3150-45t^2}{(t^2+70)^2}\Rightarrow$

2 mei 17.30 uur dan $t = 29{,}5 \Rightarrow \left[\frac{dT}{dt}\right]_{t=29,5}=\frac{-45.29{,}5^2+3150}{(29{,}5^2+70)^2}\approx -0{,}04 \Rightarrow$

De snelheid waarmee de temperatuur dan afneemt is ongeveer 0,04 ºC per uur.

c. Voor het maximum geldt :

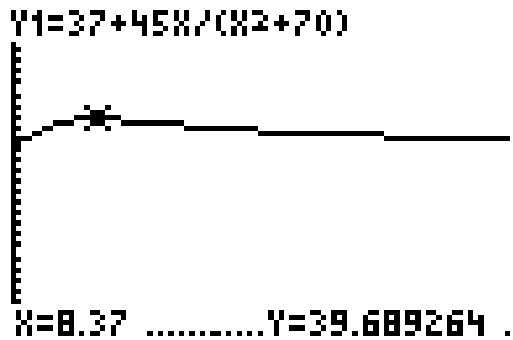
$\frac{dT}{dt}=0\Rightarrow\frac{3150-45t^2}{(t^2+70)^2}=0\Rightarrow 3150-45t^2=0\Leftrightarrow$

$45t^2=3150\Leftrightarrow t^2=70$

$t\approx$ - 8,37 (kan niet) of $t\approx$ 8,37.

Uit de schets volgt dat er een maximum is bij $x\approx$ 8,37 $\Rightarrow$

De maximale lichaamstemperatuur van Frank is ongeveer 39,7 ºC.



d. Voer in : $y_2=\frac{3150-45x^2}{(x^2+70)^2}$ en neem b.v. het window

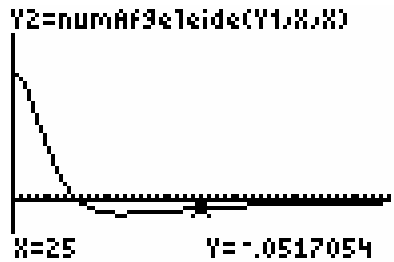
[0 , 50] X [-0,3 ; 1] . De schets wordt dan :

Met de optie zero vinden we het snijpunt met de x-as.

We vinden dan $x\approx$ 8,37.

Uit de schets blijkt dat de afgeleide vanaf $t\approx$ 8,37 negatief is ,daarom daalt de temperatuurfunctie T van af $t\approx$ 8,37.

Eerst is er een toenemende daling omdat de afgeleide steeds kleiner wordt . Vervolgens is er een afnemende daling omdat na het minimum van de afgeleide blijkt dat de helling steeds groter wordt.



40.

a. Oppervlakte van de bodem is $x^2\Rightarrow K_{bodem}=24x^2$

b. Opp.$_{\text{zijkanten}}=4.x.y \Rightarrow K_{zijkanten}=4\cdot 18xy=72xy$

c. Uit het gegeven volgt : $24x^2+72xy=288\Leftrightarrow 72xy=288-24x^2\Rightarrow y=\frac{288-24x^2}{72x}\Leftrightarrow$

$y=\frac{12-x^2}{3x}$

d. $I_{kist}=opp_{grondvlak}\cdot hoogte=x^2\cdot y\Rightarrow I_{kist}=x^2\cdot\frac{12-x^2}{3x}=$

$\frac{12x^2-x^4}{3x}=4x-\frac{1}{3}x^3\Rightarrow I=4x-\frac{1}{3}x^3$

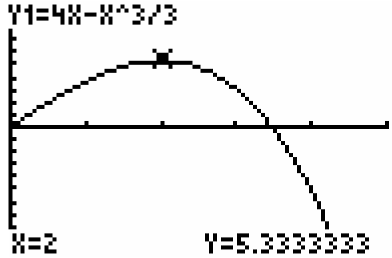
e. $i'(x)=4-x^2\Rightarrow I'(x)=0$ geeft :$x^2=4\Leftrightarrow x=2$ *of* $x=-2$(vevalt)

Uit de schets volgt dat er inderdaad bij $x = 2$ een max*i*mum is.$\Rightarrow$

Max. $I(2) = 8-2\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}$

De afmetingen van de bodem zijn 2 bij 2 meter.

Voor de hoogte geldt: hoogte = $y=\frac{12-4}{6}=1\frac{1}{3}$ meter.



41.

a. Het verkeer wordt bij hogere snelheden steeds onveiliger.

b. De totale afstand is lengte remweg + lengte auto = 12,5 + 4 = 16,5 meter.

$t=\frac{16,5}{10}=1,65$ sec.

c. Nu is de afstand 18 + 4 = 22 meter. De snelheid is 12 m/s. $\Rightarrow$ De gebruikte tijd is :

$\frac{22}{12}=1\frac{5}{6}$ sec. D.w.z. dat het gemiddeld 1 5/6 seconde duurt voordat 1 auto dat punt passeert.

Het aantal seconden per uur is 60 . 60 = 3600 $\Rightarrow$ Er passeren dan dus $\frac{3600}{1\frac{5}{6}}\approx 1964$ auto's per uur dat punt.

d. v is het aantal meter dat een auto per seconde aflegt. De totale remweg is $4 + r$. We moeten naar een tijd van een uur. $\Rightarrow$ 3600 seconden.

Het aantal auto's Q is de totale tijd van 3600 seconden gedeeld door de gebruikte tijd t per auto. $\Rightarrow$ $Q=\frac{3600}{t}$ Verder geldt : $v=\frac{\text{afgelegde weg}}{\text{tijd}}=\frac{r+4}{t}\Rightarrow t=\frac{r+4}{v}$

Dit gaan we nu invullen $\Rightarrow$ $Q=\frac{3600}{\left(\frac{4+r}{v}\right)}=3600\cdot\frac{v}{4+r}=\frac{3600v}{4+r}$

e. $r=0,125v^2$ $v=16\Rightarrow$ $r=0,125\cdot 16^2=32$ $\Rightarrow$ Q = $\frac{3600\cdot 16}{4+32}=1600\Rightarrow$

$r = 32$ en $Q = 1600$

f. $v=54km/uur=\frac{54000}{3600}meter/seconde=15m/s\Rightarrow$ $r=0,125\cdot 15^2=28,125$ $\Rightarrow$

$\frac{3600\cdot 15}{4+28,125}\approx 1681\Rightarrow$ Er passeren dan 1681 auto's per uur punt A.

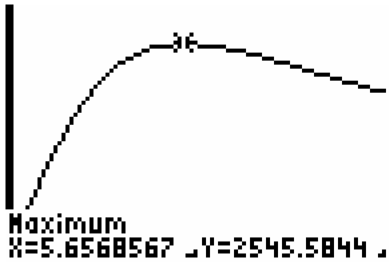
g. $\left.\begin{array}{l} Q = \dfrac{3600v}{4+r} \\ r = 0{,}125v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow Q = \dfrac{3600v}{4+0{,}125v^2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{3600\cdot(4+0{,}125v^2) - 3600v\cdot 0{,}250v}{(4+0{,}125v^2)^2}$$

$$= \frac{14400+450v^2-900v^2}{(4+0{,}125v^2)^2} = \frac{14400-450v^2}{(4+0{,}125v^2)^2}$$

h. Q maximaal $\Rightarrow$ $Q'(v) = 0 \Leftrightarrow 450v^2 = 14400 \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{14400}{450} = 32 \Rightarrow v = \sqrt{32} \approx 5{,}66$

De schets van de grafiek is :



We zien dus duidelijk dat er een maximum is bij
v = 5,66 meter/seconde $\Rightarrow$ De snelheid in km/uur is dan :
5,66 . 3,6 = 20,4 km/uur.
Er passeren dan dus 2546 auto's per uur dat punt A.
Opmerking. v kan natuurlijk niet negatief zijn.

42. $W_1 = 3v^2 \qquad W_i = 7{,}5\cdot 10^{-4}\cdot\dfrac{M^2}{v^2} \qquad W = W_1 + W_i$

a.

$$W = 3v^2 + 7{,}5\cdot 10^{-4}\cdot M^2\cdot v^{-2} \Rightarrow \frac{dW}{dv} = 6v + 7{,}5\cdot 10^{-4}\cdot M^2\cdot -2v^{-3} =$$

$$6v + 7{,}5\cdot 10^{-4}\cdot M^2\cdot(-2)\cdot\frac{1}{v^3}$$

$M = 4.10^6 \Rightarrow M^2 = 16\ .\ 10^{12}$ Dit nu gaan invullen in de afgeleide en verder gelijknamig maken. $\Rightarrow$

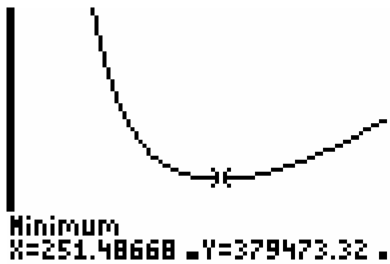
$$\frac{dW}{dv} = 6v\cdot\frac{v^3}{v^3} + 7{,}5\cdot 10^{-4}\cdot\left(16\cdot 10^{12}\right)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{v^3} = \frac{6v^4 - 240\cdot 10^8}{v^3} = \frac{6v^4 - 2{,}40\cdot 10^{10}}{v^3}$$

b.

Voor $\dfrac{dW}{dv} = 0$ geldt dat de teller is nul. $\Rightarrow$

$$6v^4 = 2{,}4\cdot 10^{10} \Rightarrow v^4 = 0{,}4\cdot 10^{10} \Rightarrow v = \sqrt[4]{0{,}4\cdot 10^{10}} \approx 251{,}5 \text{ m/s}$$

Nu een schets van $W = 3v^2 + 120\cdot 10^8\cdot v^{-2}$ Dit is lastig !!!
Neem b.v. het window: [0 ,450] X [0 , 1200000]
In de figuur is te zien dat we inderdaad te maken hebben met een minimum bij $x = v \approx 251{,}5$
$\Rightarrow$ De snelheid in km/uur is dan :
$251{,}5\cdot 3{,}6 \approx 905$ km/uur.



c.

Nu moeten we $v = 251{,}5$ invullen $\Rightarrow$

$W_1(251{,}5)_1 = 3 \cdot (251{,}5)^2 \approx 189756$ en

$W_i(251{,}5) \approx 189716$

$\Rightarrow$ De uitkomsten zijn bij benadering gelijk, daarom klopt het gevraagde.

43.

a. Uit de figuur blijkt dat boven zee sprake is van een neerwaartse luchtstroom. Daarom kost het vliegen boven zee meer energie dan vliegen boven land.

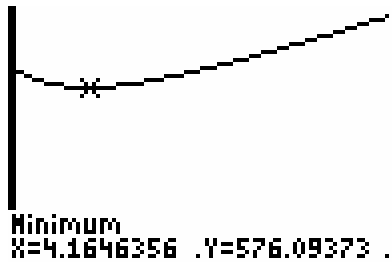
b. $EB^2 = AE^2 + AB^2 \Leftrightarrow EB^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow EB = 13$ km.
De nodige energie is dan : 13 . 50 kJ = 650 kJ

44.

a. Van E naar C dan de stelling van Pyth. $\Rightarrow CE^2 = AC^2 + AE^2 \Rightarrow CE^2 = x^2 + 25 \Rightarrow$
CE = $\sqrt{x^2+25}$
Energieverbruik is dan: $50 \cdot \sqrt{x^2+25}$
Over land is de lengte BC = $12 - x$ $\Rightarrow$ Energieverbruik is dan $32.(12 - x)$ $\Rightarrow$ Het totale energieverbruik is : $T = 50 \cdot \sqrt{x^2+25} + 32(12-x)$

b. Nu moet gelden : $50 \cdot \sqrt{x^2+25} + 32(12-x) = 640 \Rightarrow$
Voer in : $y_1 = 50 \cdot \sqrt{x^2+25} + 32(12-x)$ en $y_2 = 640$
Met intersect vinden we het snijpunt bij $x \approx 11{,}28$. $\Rightarrow$
De afstand AC is dus ongeveer 11,28 km.

c. We moeten nu het minimum bepalen van de functie T.
Met de optie minimum vinden we het minimum bij $x = 4{,}16$.
De waarde is dan $y = 576$.
Uit de **schets** zien we dat hier sprake is van een minimum.
$\Rightarrow$ Op 4,16 km van A bereikt de ekster de kust. Het energieverbruik is dan 576 kJ.



45. Gegeven : $y = 6\sqrt{x^2+288} + 10 - 2x$

a. $\dfrac{dy}{dx} = 6 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+288}} \cdot 2x - 2 = \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+288}} - 2$

b.

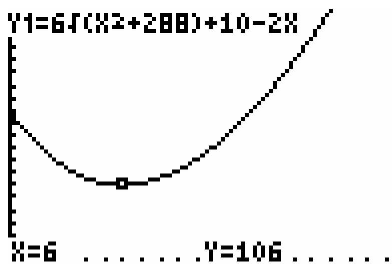
Voor het minimum geldt :

$\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{6x}{\sqrt{x^2+288}} = 2 \Rightarrow 6x = 2\sqrt{x^2+288} \Rightarrow$

$3x = \sqrt{x^2+288} \Rightarrow 9x^2 = x^2 + 288 \Leftrightarrow 8x^2 = 288$

$\Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = -6$ (vervalt) $\vee\ x = 6$ (voldoet)

Neem b.v. het window [0,20] X [100 , 120]



Uit de schets zien we dat er inderdaad bij $x = 6$ sprake is van een minimum. $\Rightarrow$
Min $y(6) = 106$.

46.

a. $BE^2 = AB^2 + AE^2 \Rightarrow BE^2 = 10^2 + 5^2 = 125 \Rightarrow BE = \sqrt{125}$ km $\approx$ 11180 meter.
De aanlegkosten zijn dan : 11180 . 140 = 1565200 euro.

b. De aanlegkosten zijn dan : 10000 . 140 + 5000 . 100 = 1700000 euro

c. $AC = 2$ km $\Rightarrow CE^2 = AC^2 + AE^2 \Rightarrow CE^2 = 4 + 25 = 29 \Rightarrow CE = \sqrt{29}$ km $\approx$ 5385 m.
De aanlegkosten zijn dan : BC . 100 + CE .140 = 8000 . 100 + 5385 . 140 $\approx$ 1553900 euro.

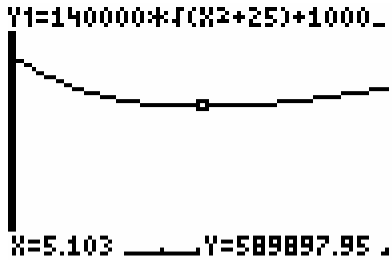
d. Nu $AP = x$ km dan $BP = 10 - x$ km.
De aanlegkosten van het stuk BP is dan : $(10 - x)$.1000 . 100 = $(10 - x)$.100000 =
$1000000 - 100000x$ euro.

e. Voor het traject BPE hebben we nog PE nodig. We gaan dus eerst PE berekenen. $\Rightarrow$
$PE^2 = AP^2 + AE^2 \Rightarrow PE^2 = x^2 + 25 \Rightarrow PE = \sqrt{x^2+25}$ km = 1000. $\sqrt{x^2+25}$ meter.
De aanlegkosten voor PE zijn dan : 140.1000. $\sqrt{x^2+25}$ = 140000. $\sqrt{x^2+25}$ euro

f. $TK = BP \,.\, 100 + PE \,.\, 140 = 1000000 - 100000x + 140000.\sqrt{x^2+25}$

g. $TK = 1000000 - 100000x + 140000.\sqrt{x^2+25} \Rightarrow \dfrac{dTK}{dx} = -100000 + 140000.\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+25}}.2x =$

$-100000 + \dfrac{140000}{\sqrt{x^2+25}}$ Nu geldt : $\left[\dfrac{dTK}{dx}\right]_{x=5,103} = 0$



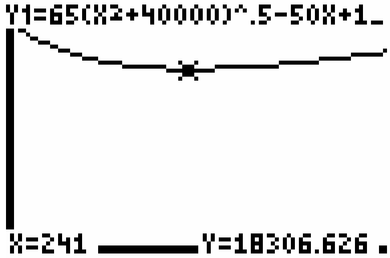
Nu weten we dat er eventueel een maximum of een minimum is. Nu nog even de schets van TK .
We zien inderdaad dat er bij $x \approx 5,103$ sprake is van een minimum van TK.

47. Zie de tekening in het boek. Aanlegkosten over land: 50 euro/m en in de rivier zijn de aanlegkosten 65 euro/m.

a. Gegeven $AP = x \Rightarrow EP^2 = AP^2 + AE^2 \Rightarrow EP^2 = x^2 + 40000 \Rightarrow EP = \sqrt{x^2+40000}$
Verder geldt dat $PF = 2000 - x \Rightarrow$
$TK = (20000 - x).50 + \sqrt{x^2+40000}.65 = 65.\sqrt{x^2+40000} - 50x + 100000$

b. $\frac{dTK}{dx} = 65.\frac{1}{2\sqrt{x^2+40000}}.2x - 50 = \frac{65x}{\sqrt{x^2+40000}} - 50$

Nu de controle: $\Rightarrow \left[\frac{dTK}{dx}\right]_{x=241} = 0 \quad \Rightarrow$ Net als in de vorige opgave is er misschien sprake van een maximum of een minimum bij $x \approx 241$. Nu nog de schets van *TK*
We zien dan dat er inderdaad bij $x \approx 241$ sprake is van een minimum van *TK*.



48. Gegeven : $p(q) = 1560 - a\sqrt{q}$

a.

$R = p \cdot q = \left(1560 - a\sqrt{q}\right)q = 1560q - aq\sqrt{q} = 1560q - a \cdot q^{1,5}$

R is maximaal $\Rightarrow R' = 0 \Rightarrow \frac{dR}{dq} = 1560 - 1,5a \cdot q^{0,5} = 0 \Leftrightarrow 1560 = 1,5a\sqrt{q}$

Uit het gegeven volgt dat het maximum is bij $q = 169 \Rightarrow R'(169) = 0 \Rightarrow$
$1560 = 1,5a \cdot \sqrt{169} \Leftrightarrow 1560 = 1,5a \cdot 13 \Leftrightarrow 1560 = 19,5a \Leftrightarrow a = 80$

b. $a = 92 \Rightarrow p(q) = 1560 - 92\sqrt{q}$ en $K = 250 + bq$ $\quad b > 0$ en maximum van W bij $p = 548$.

$W = R - K = \left(1560q - 92q\sqrt{q}\right) - \left(250 + bq\right)) = 1560q - 92q^{1,5} - 250 - bq$

Maximum $\Rightarrow W' = 0 \Rightarrow 1560 - 138q^{0,5} - b = 0$ Dit is het geval bij een prijs van 548 euro.
Aangezien we weten dat geldt $p = 1560 - 92\sqrt{q}$, daarom kunnen we *q* berekenen. $\Rightarrow$
$548 = 1560 - 92\sqrt{q} \quad \Leftrightarrow 92\sqrt{q} = 1012 \Leftrightarrow \sqrt{q} = 11 \Rightarrow q = 121$
We gaan nu deze waarde invullen in de vergelijking W' = 0 $\Rightarrow$
$1560 - 138 \cdot 121^{0,5} - b = 0 \Leftrightarrow 1560 - 138 \cdot 11 = b \Leftrightarrow b = 42$